黄河下游水沙关系的协调治理
——以简单线性规划模型为研究工具

房晨

（北京大学环境科学与工程学院，北京 100871）

摘 要：黄河下游复杂的水沙关系主要源于中上游流域的水土流失以及沿线支流汇入的大量泥沙，这直接影响了黄河下游的生态环境建设与高质量发展。大量的泥沙不仅降低了水质，同时形成的“地上悬河”还威胁着周边居民的生活与安全。本文据此构建了一个简单的线性规划约束模型，约束条件设置为：在支流上实施修建水库、调水调沙与清淤除泥的工程保证干流含沙量达标，目标函数设置为：工程实施的总成本最低。之后，本文提供了单纯形法、内点法、遗传算法等一系列系统分析算法对这一最优化问题进行求解，试图呈现不同方法的应用效果，并针对得到的结果提出新的思考。

关键词：黄河流域 水沙关系 线性规划 模型研究

1、 研究背景

1.1 黄河简介

黄河是中华儿女的母亲河，同时也是我国的第二大河，它一路自然环境多变、水文情况复杂，同时也蕴含着浓厚的文化底蕴。黄河一共流经青海、四川、甘肃、宁夏、内蒙古、山西、陕西、河南和山东等 9 个省（区），流域横跨我国东中西九省，干流全长 $5464km$，流域面积83.44万 km^2，以占全国2%的径流量为全国15%的耕地和12%的人口提供水源，对于我国西北和华北地区各省市的经济发展、居民的生产生活等都起着举足轻重的作用，在我国经济社会发展和国土空间格局中具有战略性和全局性地位。[1]

[1] 孙剑辉,冯精兰,柴艳,张干,李军,王国良.黄河水污染的研究进展与防治对策[J].河南师范大学学报(自然科学版),2008,36(06):82-87.

图 1 黄河流域地图[2]

1.2 水沙失衡

黄河长期以来始终存在着较为严重且典型的生态环境问题，被认为是世界上最难治理的河流之一，其中一个较为突出的生态问题便是水沙失衡，这一现象在下游更为显著。

黄河以含沙量高著称，“水沙沙多，水沙异源”是其主要特征，也是治理的一大难题。黄河的水沙主要来自于中上游地区的土地荒漠化与植被稀缺造成的水土流失，大量泥沙被雨水冲刷汇入河道，直接影响下游河水的色度、浊度与含沙量，并使得下游形成“地上悬河”[3]，妨碍了下游人民水资源的取用，同时也提高了下游洪灾爆发的风险。

我国对黄河水沙的治理已有几十年历史，其间借助中上游林草种植修复植被、下游河道整治工程等手段取得了较为显著的成果。其中位于河南洛阳的黄河小浪底水利枢纽作为治理开发黄河的重要工程手段，能够有效缓解汛期河床在水沙的淤积下被抬高以及水沙失衡的情况，具有优越的自然条件和重要的战略地位。

但水沙调控的问题十分复杂，人为干预（如修筑水库）和自然气候变化（如暴雨与干旱）对黄河的水沙状况都会产生影响[4]，未来仍需要在这一领域开展更多的研究。

我国近来对黄河水沙治理与流域发展问题日益重视。2019 年 9 月，习近平在黄河流域生态保护和高质量发展座谈会上提出“治理黄河，重在保护，要在治理”，并强调中游

[2] 图片来源：维基百科（https://en.wikipedia.org/wiki/Yellow_River）
[3] 张红武.基于流域高质量发展目标的黄河水沙调控与防洪相关问题研究[J/OL].水利水电技术:1-11
[4] 赵阳,胡春宏,张晓明,王友胜,成晨,殷小琳,谢敏.近 70 年黄河流域水沙情势及其成因分析[J].农业工程学报,2018,34(21):112-119.

要突出抓好水土保持和污染治理工作。[5] 2021 年 10 月，习近平在深入推动黄河流域生态保护和高质量发展座谈会上再次强调坚决落实“四水四定”工作（以水定城、以水定地、以水定人、以水定产），并抓好上中游水土流失治理和荒漠化防治工作，推进流域的综合治理。[6]

水沙失衡问题之外，黄河的水污染风险也十分突出。随着经济发展与人口扩张，城市建设、工业发展、农业开垦等一系列的因素对黄河的取水排污造成了较大的压力，对黄河造成了点源、面源、支流等不同类型的污染，对水资源和水质构成了双重考验。[7]

1.3 研究思路

为了分析黄河水沙的控制思路，在参考常规水环境系统模型的基础上选取黄河下游若干截面点作为研究对象，通过线性规划模型（Linear Programming Model, LP）设置水沙的总量约束（浓度上限），同时综合考虑泥沙存在的自然损失与面源污染，最终分析保证不同点位能够污染达标所需要的污染治理程度，并提出政策建议。

具体数值求解算法可以参考课堂上介绍的关于线性规划模型的单纯形法（Simplex Algorithm, SA）、内点法（Interior-Point Methods, IP）、遗传算法（Genetic Algorithm, GA）等，不同方法得出的结果理论上应不存在显著差异。

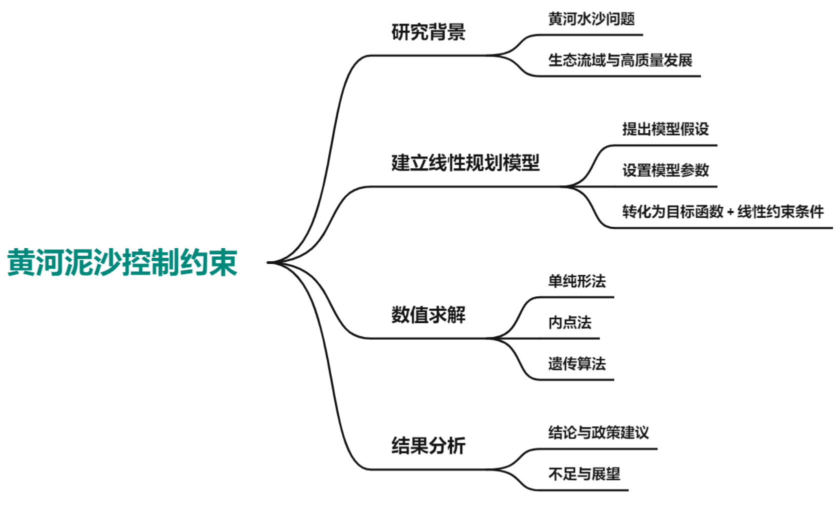


图 2 本文建模思路图示

[5] 习近平：在黄河流域生态保护和高质量发展座谈会上的讲话（新华网 2019-10-15）
http://www.xinhuanet.com/2019-10/15/c_1125107042.htm
[6] 习近平在深入推动黄河流域生态保护和高质量发展座谈会上的讲话（黄河网 2021-10-22）
http://www.yrcc.gov.cn/xwzx/hhyw/202110/t20211022_234625.html
[7] 周夏飞,曹国志,於方,杨威杉,徐泽升.黄河流域水污染风险分区[J/OL].环境科学:1-14

2、 研究方法

2.1 研究对象

从地理角度来看，黄河自河源至内蒙古托克托河口镇为上游，托克托河口镇至河南桃花峪花园口附近为中游，桃花峪至入海口为下游。黄河下游河段主要经由河南孟津至山东利津，全长$755km$，流域面积占全流域的3%，下游水沙问题主要源于中下游的支流汇入与水土流失造成的影响，因此我们聚焦于中下游的部分支流进行分析与讨论。

为了建立模型对水沙问题进行更加细化的研究，现将实际问题抽象化：以黄河中游的三条支流A、B、C作为研究对象，分别考察支流上进行水沙治理对干流泥沙含量可能产生的影响。

2.2 模型建构

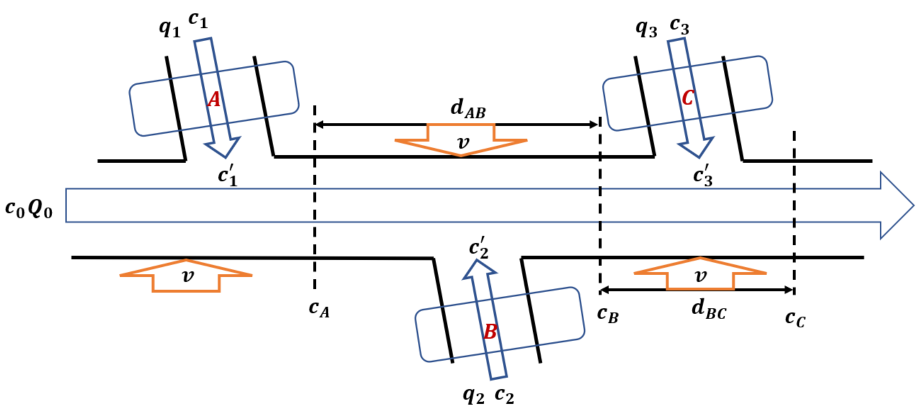


图 3 干支流模型示意图

如图所示，本模型考虑汇入黄河干流的三条支流，汇入的位置从上游到下游依次为A、B、C，三个入河口注入干流的支流水流量分别为q_1、q_2、q_3，水沙未经水库调蓄与处理之前的含量分别为c_1、c_2、c_3，处理后注入干流的含量设为c_1'、c_2'、c_3'，三个截面的水沙监测点位分别在入河口下游附近的位置，对应测出的水沙含量为c_A、c_B、c_C，河口

的距离间隔分别为d_{AB}、d_{BC}。（此模型建构的过程中参考了童季贤[8]、李波[9]、汪家权[10]等人的研究）

2.3 模型假设

基于上述的干支流模型，为了简化计算，提出下面三条假设：

① 支流汇入干流后短时间内能够实现泥沙的混匀；

② 支流流量远小于干流，且干流在流动过程中的流量恒定不变；

③ 泥沙含量在流动中会衰减，同时流动中的水土流失会导致泥沙的面源汇入。

2.4 参数设置

根据假设①：

在A、B、C监测点位处，干流与支流的水沙已经完全混匀，因此能够根据干流和支流的水沙含量求出A、B、C点的水沙含量。

$$c_A = \frac{c_0 Q_0 + c_1' q_1}{Q_0 + q_1}$$

$$c_B = \frac{c_A (Q_0 + q_1) + c_2' q_2}{Q_0 + q_1 + q_2}$$

$$c_C = \frac{c_B (Q_0 + q_1 + q_2) + c_3' q_3}{Q_0 + q_1 + q_2 + q_3}$$

根据假设②：

由于支流流量q_k远小于干流流量Q_0，可以对上述的三个等式进行简化处理，得到水沙含量的等价表达式。

$$c_A = c_0 + \frac{q_1}{Q_0} c_1'$$

[8] 童季贤.污水治理控制工程中的一个数学模型[J].西南交通大学学报,1997(06):109-115.
[9] 李波.线性规划在滇池草海污染目标控制优化决策中的运用[J].云南环境科学,1997(03):7-9.
[10] 汪家权. 水环境系统模拟[M]. 合肥工业大学出版社, 2006.

$$c_B = c_0 + \frac{q_1}{Q_0}c_1' + \frac{q_2}{Q_0}c_2'$$

$$c_C = c_0 + \frac{q_1}{Q_0}c_1' + \frac{q_2}{Q_0}c_2' + \frac{q_3}{Q_0}c_3'$$

根据假设③：

考虑泥沙在河道中传输过程中的散失，引入最简单的指数递减规律模拟泥沙的衰减过程：随着流动距离d的不断增大，实际的泥沙含量会在水流和水体生物的互相作用下发生沉积与衰减，呈现出一定的下降趋势，但泥沙含量不可能无限下降并趋于零，所以需要设置一个收敛的极限值为$\alpha c_0(0 < \alpha < 1)$。

考虑河流面源污染的影响，设定在河水流动过程中流域的水土流失会以恒定速率将部分泥沙汇入干流中，增大干流的泥沙浓度，在模型中忽略流域地区异质性，假定不同流域处的汇入速率均相同，同时假定泥沙含量会随传输距离不断积累，速率为v。

因此流动一定的距离d后，干流对应的泥沙浓度c^*的表达式应为：

$$c^* = \alpha c_0 + (1-\alpha)c_0 e^{-\beta d} + vd$$

根据上述分析，可以大致做出下面关于泥沙含量与河流流动距离之间关系的示意图：

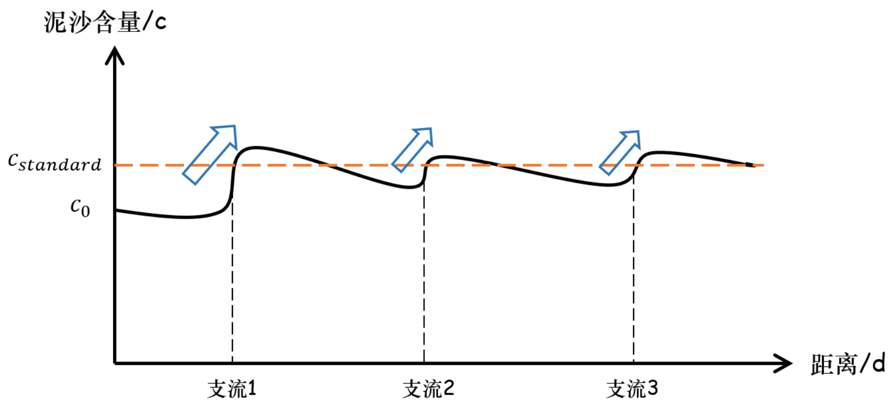


图 4 泥沙含量变化趋势示意图

2.5 线性规划模型

引入水库的水沙去除率θ_k作为最终的决策变量（Controlled Variable），去除率θ_k定义为水库需要处理的泥沙量占原始泥沙含量的比例，用来衡量三条支流需要实现的泥沙去除比率。θ_k的定义式为：

$$\theta_k = \frac{c_k - c_k'}{c_k} \quad (k = 1,2,3)$$

最终需要实现的目标应当是污水处理的总成本T最小，考虑三条支流修建水库的固定成本分别为s_k，运行过程中清理单位质量泥沙的成本为r_k，运行时间t_k，则总成本可表示为：

$$T = \sum_k^n [s_k + r_k q_k (c_k - c_k') t_k] = \sum_k^n [s_k + r_k q_k \theta_k c_k t_k]$$

结合课堂上学到的有关线性规划的内容，我们可以抽象出目标函数（Object Function）为：$T = \sum_k^n [s_k + r_k q_k \theta_k c_k t_k] \quad k = 1,2,3$。目标是总成本$T$取得最小值，约束条件即为每条支流对应监测点位的泥沙含量需要达标，即 $c_j^* \le c_{standard} \quad j = A, B, C$。

综上，最终的线性规划模型可以表述为：

$$\begin{cases} Minimize\ T = \sum_k^n [s_k + r_k q_k \theta_k c_k t_k] \quad k = 1,2,3 \\ subject\ to: \quad c_j^* \le c_{standard} \quad j = A, B, C \end{cases}$$

全部参变量列举如下，主要包括三个维度：

① 河水：干支流的基本水文情况数据

Q_0 = 黄河干流河水流量(m^3/s)

q_k = 各支流的河水流量(m^3/s)

c_k = 各支流的含沙量(kg/m^3)

d = 不同支流入河口之间的距离(km)

② 水库：建设与运行成本、处理泥沙能力与其他基本参数

s_k = 水库建设的固定成本（万元）

r_k = 水库除去一单位质量泥沙所需成本（元/千克）

t_k = 水库的运行时间（秒）

③ 泥沙：随河水流动过程中的扩散、衰减参数

α、β = 泥沙含量的衰减参数

v = 面源汇入速率（$(kg/m^3)/km$）

3、 研究结果

3.1 数据设置与代入

从目标函数的形式$\sum_k^n [s_k + r_k q_k \theta_k c_k t_k]$可以看出，与$\theta_k$直接相关的部分仅涉及$r_k q_k \theta_k c_k t_k$部分，因此水库建设的固定成本值不影响最终的优化结果。并且在计算的过程中默认水库除去一单位质量泥沙所需成本均相同，运行时间也一致，则r_k和t_k可以单独提取出来，化简之后的目标函数即需要使得$\sum_k^n q_k \theta_k c_k$的值最小即可。

通过查阅水利部发布的《中国河流泥沙公报 2020》，可以得到关于黄河流量与泥沙量的基本信息，根据干流的年径流量数据（338.6亿立方米）可以大致换算得到Q_0为$1000m^3/s$，同时，平均含沙量为$c_0 = 20kg/m^3$。

之后查阅各支流的泥沙与水文数据，筛选出三条含沙量显著超过平均含沙量c_0的支流，分别为北洛河、泾河、延河，因此将其作为模型的A, B, C支流。

三条支流的基本信息如下表所示：

表 1 三条支流的基本信息

支流	水文控制站	流量(m^3/s)	含沙量(kg/m^3)	模型对应
北洛河	状　头	24.3	84.3	A
泾河	张家山	49.3	127	B
延河	甘谷驿	6.25	183	C

来源：《中国河流泥沙公报 2020》（中华人民共和国水利部）

关于泥沙的沉降与面源汇入，选取泥沙衰减参数为$\alpha = 0.8$、$\beta = 0.01$，泥沙面源汇入的速率$v = 0.01(kg/m^3)/km$。另外，为了方便计算，将模型中各支流之间的距离d均设置为$100km$。由此可以写出泥沙含量衰减的基本方程：

$$c^* = 0.8c_0 + 0.2c_0 e^{-1} + 1$$

最后，为了保证泥沙含量变化幅度不超过之前的5%，因此将标准泥沙含量$c_{standard}$的值设置为 $21kg/m^3$。

将上述基本信息代入线性规划模型当中，可以得到带有具体数值的规划模型：

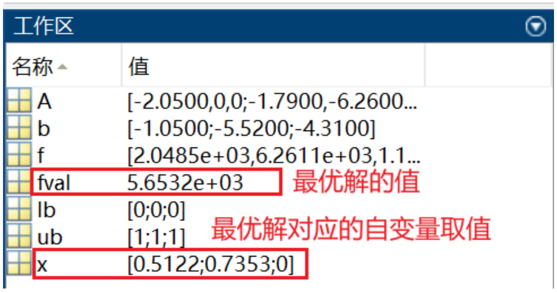
$$Min \quad z = 2048.5 \cdot \theta_1 + 6261.1 \cdot \theta_2 + 1143.8 \cdot \theta_3$$

$$s.t. \quad \begin{cases} 2.05\theta_1 & \geq 1.05 \\ 1.79\theta_1 + 6.26\theta_2 & \geq 5.52 \\ 1.56\theta_1 + 5.47\theta_2 + 1.14\theta_3 & \geq 4.31 \\ 0 \leq \theta_1, \theta_2, \theta_3 \leq 1 \end{cases}$$

3.2 线性规划求解结果

首先使用 MATLAB 的$linprog$函数和 Excel 的“规划求解”功能对上述线性规划问题进行求解，对应的代码与结果如下：

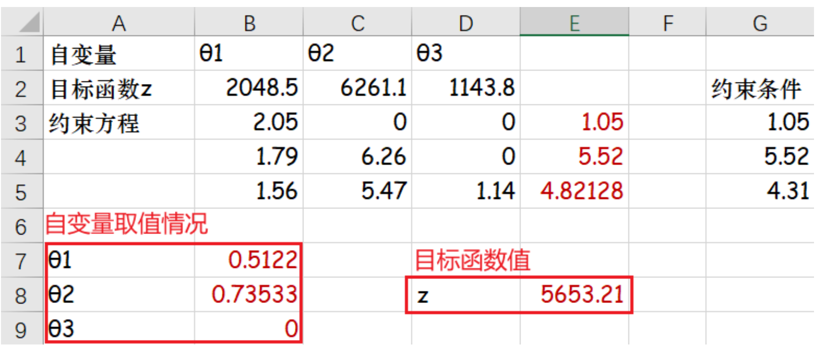
```
clc;
clear all;
f= [2048.5,6261.1,1143.8];
A= [-2.05,0,0; -1.79, -6.26,0; -1.56, -5.47, -1.14];
b= [-1.05; -5.52; -4.31];
lb= zeros(3,1);      % 生成一个 3 行 1 列的全 0 矩阵
ub= ones(3,1);       % 生成一个 3 行 1 列的全 1 矩阵
[x,fval]=linprog(f,A,b,[],[],lb,ub);
```



名称	值
A	[-2.0500,0,0;-1.7900,-6.2600...
b	[-1.0500;-5.5200;-4.3100]
f	[2.0485e+03,6.2611e+03,1.1...
fval	5.6532e+03
lb	[0;0;0]
ub	[1;1;1]
x	[0.5122;0.7353;0]

图 5 MATLAB 的求解结果

Excel 的求解结果如图 6 所示：



	A	B	C	D	E	F	G
1	自变量	θ1	θ2	θ3			
2	目标函数z	2048.5	6261.1	1143.8			约束条件
3	约束方程	2.05	0	0	1.05		1.05
4		1.79	6.26	0	5.52		5.52
5		1.56	5.47	1.14	4.82128		4.31
6	自变量取值情况						
7	θ1	0.5122		目标函数值			
8	θ2	0.73533		z	5653.21		
9	θ3	0					

图 6 Excel 的求解结果

从结果可以看出，当$\theta_1 = 0.51$；$\theta_2 = 0.74$；$\theta_3 = 0$时，目标函数z存在最小值，最小值为5653.21。

3.3 不同解法的对比分析

3.3.1 单纯形法

单纯形法（Simplex Algorithm）通过引入新变量的方式将约束条件的不等关系变为等式，转化后的线性规划问题标准形式（矩阵形式）为：

$$Max\ c^T x$$

$$s.t. \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

则原问题在加入松弛变量(Slack Variables)后变为：

$$Max \quad z' = -2048.5 \cdot \theta_1 - 6261.1 \cdot \theta_2 - 1143.8 \cdot \theta_3$$

$$s.t. \quad \begin{cases} 2.05\theta_1 - \theta_4 = 1.05 \\ 1.79\theta_1 + 6.26\theta_2 - \theta_5 = 5.52 \\ 1.56\theta_1 + 5.47\theta_2 + 1.14\theta_3 - \theta_6 = 4.31 \\ \theta_1 + \theta_7 = 1 \\ \theta_2 + \theta_8 = 1 \\ \theta_3 + \theta_9 = 1 \\ \theta_i \geq 0 \end{cases}$$

使用 MATLAB 实现的代码如下：

```
A = [2.05,0,0, -1,0,0,0,0,0; 1.79,6.26,0,0, -1,0,0,0,0; 1.56,5.47,1.14,0,0, -1,0,0,0; 1,0,0,0,0,0,1,0,0;0,1,0,0,0,0,0,1,0;0,0,1,0,0,0,0,0,1];
b = [1.05; 5.52; 4.31;1;1;1];
c = [-2048.5, -6261.1, -1143.8, 0, 0, 0, 0, 0, 0];
ind = [4 5 6 7 8 9];
[x, z, ST, ca] = SimplexMax(c, A, b, ind)
```

单纯形法需要借助单纯形表格进行计算求解，该表格的初始状态为：

表 2 初始单纯形表

B	C_B	C	-2048.5	-6261.1	-1143.8	0	0	0	0	0	0	β
		P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	
A_4	0	1.05	2.05	0	0	-1	0	0	0	0	0	
A_5	0	5.52	1.79	6.26	0	0	-1	0	0	0	0	
A_6	0	4.31	1.56	5.47	1.14	0	0	-1	0	0	0	
A_7	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	
A_8	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	
A_9	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	
	z=0		σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6	σ_7	σ_8	σ_9	

其中：

A_i：基变量，首先挑选单位阵为初始基，构成向量B；

C_B：基变量在目标函数中的系数向量；

C：目标函数的系数；

P_i：引进松弛变量后限制方程组的列系数，P_0代表等式右侧的常数项；

z：当前最优解；

σ_i：非基变量的检验数

3.3.2 内点法

内点法（Interior-Point Methods）又称 Karmarkar 算法，是一类解决线性规划问题的多项式算法。该方法的核心思想是结合原问题和对偶问题，在可行域（而不仅是边界上）寻找使得原问题函数值和对偶问题函数值差值等于零的可行解。

具体的求解思路如下：

① 结合单纯形法提供的标准形式，构造出原问题(Primal Question)与相应的对偶问题(Dual Question)；

原问题 $\mathscr{P}$:

$$Min \quad z' = 2048.5 \cdot \theta_1 + 6261.1 \cdot \theta_2 + 1143.8 \cdot \theta_3$$

$$s.t. \begin{cases} 2.05\theta_1 & \geq 1.05 \\ 1.79\theta_1 + 6.26\theta_2 & \geq 5.52 \\ 1.56\theta_1 + 5.47\theta_2 + 1.14\theta_3 & \geq 4.31 \\ \theta_1, \theta_2, \theta_3 > 0 \end{cases}$$

对偶问题 $\mathscr{D}$:

$$Max \quad z'' = 1.05 \cdot \omega_1 + 5.52 \cdot \omega_2 + 4.31 \cdot \omega_3$$

$$s.t. \begin{cases} 2.05\omega_1 & < 2048.5 \\ 1.79\omega_1 + 6.26 & < 6261.1 \\ 1.56\omega_1 + 5.47\omega_2 + 1.14\omega_3 & < 1143.8 \\ \omega_1, \omega_2, \omega_2 > 0 \end{cases}$$

② 引入松弛变量；

$$\begin{aligned} 2.05\theta_1 - \quad & - \theta_4 = 1.05 \\ 1.79\theta_1 + 6.26\theta_2 \quad & - \theta_5 = 5.52 \\ 1.56\theta_1 + 5.47\theta_2 + 1.14\theta_3 & - \theta_6 = 4.31 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.05\omega_1 \quad & - \omega_4 = 2048.5 \\ 1.79\omega_1 + 6.26\omega_2 \quad & - \omega_5 = 6261.1 \\ 1.56\omega_1 + 5.47\omega_2 + 1.14\omega_3 & - \omega_6 = 1143.8 \end{aligned}$$

$$2048.5 \cdot \theta_1 + 6261.1 \cdot \theta_2 + 1143.8 \cdot \theta_3 = 1.05 \cdot \omega_1 + 5.52 \cdot \omega_2 + 4.31 \cdot \omega_3$$

③ 使用松弛变量s把两个问题结合起来，并添加约束条件；

$$\sum_{i=1}^{6} \omega_i + \sum_{i=1}^{6} \theta_i + s = K$$

④ 引入哑变量 (Dummy Variable) d，并令$d = 1$，将问题均一化(Homogenization)；

$$\begin{aligned} 2.05\theta_1 - \quad & -\theta_4 - 1.05d = 0 \\ 1.79\theta_1 + 6.26\theta_2 \quad & -\theta_5 - 5.52d = 0 \\ 1.56\theta_1 + 5.47\theta_2 + 1.14\theta_3 & -\theta_6 - 4.31d = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.05\omega_1 \quad & - \omega_4 - 2048.5d = 0 \\ 1.79\omega_1 + 6.26\omega_2 \quad & - \omega_5 - 6261.1d = 0 \\ 1.56\omega_1 + 5.47\omega_2 + 1.14\omega_3 & - \omega_6 - 1143.8d = 0 \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{6} \omega_i + \sum_{i=1}^{6} \theta_i + s - Kd = 0$$

$$\sum_{i=1}^{6}\omega_i+\sum_{i=1}^{6}\theta_i+s+d=K+1$$

$$\theta_i\geq 0,\omega_i\geq 0,d>0,s>0,i=1,2,\dots,6$$

⑤ 用统一的变量表示；

$$\theta_i=(K+1)y_i,i=1,2\dots 6$$

$$\omega_i=(K+1)y_{i+6},i=1,2\dots 6$$

$$s=(K+1)y_{13}$$

$$d=(K+1)y_{14}$$

⑥ 最后引入人工变量（Artificial Variable）y_{15}作为目标函数，为了结合目标函数和约束条件，把y_{15}加入每一个约束条件中，并使$\sum_{i=1}^{11}y_i=1$，即可求出优化解。

3.3.3 遗传算法

遗传算法（Genetic Algorithm）是模拟达尔文生物进化论的自然选择和遗传学机理的生物进化过程的计算模型，也是一种通过模拟自然进化过程搜索最优解的方法。该算法通过数学的方式，利用计算机仿真运算，将问题的求解过程转换成类似生物进化中的染色体基因的交叉、变异等过程。在求解较为复杂的组合优化问题时，相对一些常规的优化算法，通常能够较快地获得较好的优化结果。

遗传算法主要用于不便于直接求解的非线性问题之中，但在本题涉及的线性规划问题中也可以应用。

MATLAB 提供的遗传算法工具箱主要分为两个函数：$gaoptimset()$函数和$ga()$函数，前者用于设置遗传算法的一些参数（可以不设置，即使用默认参数），而后者则是调用遗传算法对优化问题进行计算。

$gaoptimset()$函数的基本设置代码如下：

$$options\ =\ gaoptimset('Param1',value1,'Param2',value2,\dots)$$

其中，$'Param1'$、$'Param2'$等是需要设定的参数，比如：种群规模、交叉比例等；而$value1$、$value2$等则是$Param$的具体值。

计算的步骤主要分为：

① 把目标函数编写成函数的形式（入口参数为x，表示自变量矩阵，函数内用$x(1)$、$x(2)$等将每个自变量的值索引出来）；

② 用$gaoptimset()$函数设置 options（$ga()$函数的最后一个参数）；

③ 对$ga()$函数传入的参数进行设置（设置方式与单纯形法基本一致）并调用$ga()$函数，算出结果。

以下是具体的计算代码：

```
clear
clc

% 设置种群大小 100， 交叉概率 0.8， 最大进化代数 1000
options = gaoptimset
('PopulationSize' ,100, 'CrossoverFraction', 0.8, 'Generations',
1000);

fun = @simple_fit;
nvars = 3;      %变量个数
A= [-2.05,0,0; -1.79, -6.26,0; -1.56, -5.47, -1.14];
b= [-1.05; -5.52; -4.31]
lb= [0;0;0]    % 生成一个 3 行 1 列的全 0 矩阵
ub= [1;1;1]
[x_best,fval] = ga(fun,nvars,A,b,[],[],lb,ub,[],options)

function z = simple_fit(x)
z = x (1) *2048.5+x (2) *6261.1+ x (3) *1143.8;
end
```

计算结果为：当$\theta_1 \approx 0.512$；$\theta_2 \approx 0.735$；$\theta_3 \approx 0$时，目标函数z存在最小值，最小值为5652.09，与之前算得的结果$z = 5653.21$差异不大。（遗传算法具有一定的随机性，因此每次求解的结果可能有些许差别）

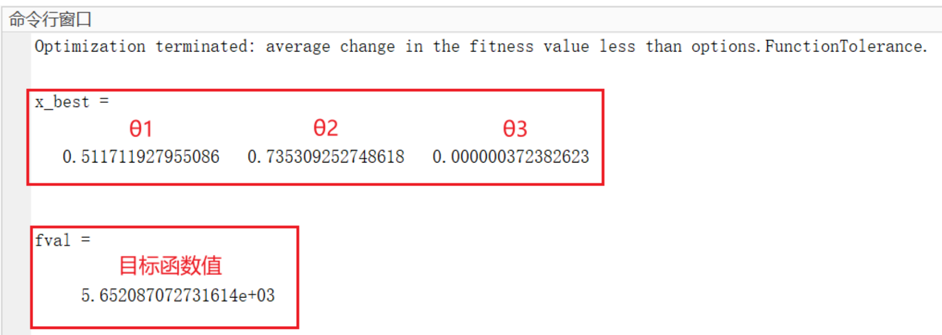


图 7 利用 MATLAB 中的遗传算法函数$ga()$得到的求解结果

4、 总结与不足

4.1 结论与政策建议

从结果中可以看出，针对处于不同位置和具有不同水文条件的支流而言，水库治理所需要投入的成本是不一样的，主要取决于支流自身的流量以及含沙量。在本题中，尽管含沙量最大的为延河，但由于其自身流量较小，因此最终的线性规划求解结果显示并不需要在该支流上修筑水库进行调水调沙，总泥沙量对黄河干流的含沙量影响程度有限。而泾河和北洛河由于地处上游且含沙量与流量较高，因此需要修筑水库调整水沙关系。

另外，泾河的含沙量与流量均高于北洛河，线性规划的最优解也反映出需要对泾河的泥沙进行更严格的管控。因此在规划水库与其他涉及水沙调节的水利枢纽的建设工作时，需要注意根据不同支流的实际情况进行设计与运行，本例中即可重点关注处在上游的北洛河和泾河，并在泾河处修筑调控能力更强的水库。

4.2 不足与展望

由于缺乏实际建模经验以及对黄河水沙关系的切身了解，本研究主要存在以下三个方面的不足：

① 文中的不少假设与实际情况存在一定距离；

② 为方便计算，不少数据并非取自实际调研的结果；

③ 模型方面选择的是最简单易解的线性规划模型，模型构建过程中存在较多简化。

在真实的研究工作中需要更多的实践、考察，同时也应该注意使用更加复杂的建模思路对实际情况进行模拟优化，并对未来进行预测。

水沙关系是黄河治理中十分复杂的环节，本文提供的思路仅仅是简单线性规划模型解决实际问题的一个小尝试，未来还需要更多的研究与努力。

参考资料

文献资料

[1] 孙剑辉,冯精兰,柴艳,张干,李军,王国良.黄河水污染的研究进展与防治对策[J].河南师范大学学报(自然科学版),2008,36(06):82-87.

[2] 张红武.基于流域高质量发展目标的黄河水沙调控与防洪相关问题研究[J/OL].水利水电技术(中英文):1-11

[3] 赵阳,胡春宏,张晓明,王友胜,成晨,殷小琳,谢敏.近 70 年黄河流域水沙情势及其成因分析[J].农业工程学报,2018,34(21):112-119.

[4] 周夏飞,曹国志,於方,杨威杉,徐泽升.黄河流域水污染风险分区[J/OL].环境科学:1-14

[5] 童季贤.污水治理控制工程中的一个数学模型[J].西南交通大学学报,1997(06):109-115.

[6] 李波.线性规划在滇池草海污染目标控制优化决策中的运用[J].云南环境科学,1997(03):7-9.

[7] 汪家权. 水环境系统模拟[M]. 合肥工业大学出版社, 2006

网页资料（附超链接地址）

[8] 中华人民共和国水利部《中国河流泥沙公报 2020》

[9] 知乎：《[运筹学]单纯形法求解线性规划问题的 Matlab 实现》

[10] CSDN：单纯形表格法求最值详解-组合数学

[11] 博客园：线性规划中的单纯形法与内点法（原理、步骤以及 matlab 实现）（四）

[12] CSDN：MATLAB 遗传算法工具箱的使用及实例（线性规划）